Chapitre | TX00

Préparer sa rentrée en CPGE-BL en mathématiques

Version du 12-05-2023 à 10:35

Contexte

Vous allez entrer en classe de CPGE-BL à la rentrée prochaine, et il va falloir vous préparer au rythme de travail et au contenu, exigeant de part la nature des études que vous envisagez et du temps que vous aurez pour vous préparer aux concours auxquels vous serez confrontés par la suite.

L'objet de ce document est simplement de vous donner quelques éléments pour préparer au mieux la transition entre les exigences des classes de l'enseignement secondaire, et celle de la classe de BL.

Organisation des enseignements

Votre enseignement des mathématiques en 1e année de BL s'articule autour de :

- 4 h de cours et travaux dirigés hebdomadaires ;
- 1 h 30 de soutien obligatoire en mathématiques pour ceux qui n'ont pas suivi la spécialité mathématiques en classe de terminale ;
- une heure d'interrogation orale bi-hebdomadaire, appelée communément « khôlle » ;

horaires auxquels s'ajoutent bien évidemment les enseignements de Lettres, Philosophie, Histoire, Langues, Sciences Économiques et Sociales et les enseignements optionnels.

Une partie du cours de mathématiques consistera notamment en :

- renforcer votre pratique du calcul, même si la finalité des situations d'évaluations qui vous seront proposées solliciteront vos capacités d'analyse et de réflexion ;
- reprendre et compléter de nombreux savoirs mathématiques rencontrés dans les classes de lycée ;
- donner davantage de rigueur à l'ensemble de vos connaissances en vue de la construction d'objets mathématiques plus élaborés.

Ce sera aussi pour vous l'occasion d'acquérir et de mettre en place des méthodes de travail permettant d'absorber l'ensemble de ces contenus et ceux à venir, et de s'imposer une organisation de travail quotidienne pour suivre au plus près l'avancée du cours.

Toutefois, très rapidement, les nouveaux concepts seront au centre de votre travail en mathématiques.

À propos de la scolarité en CPGE

La scolarité en CPGE reste exigeante, tant physiquement, moralement qu'intellectuellement.

Il est donc nécessaire, à l'instar des sportifs de haut niveau de se préparer en ce sens, et d'y consacrer une bonne partie de son temps et de son énergie, sans pour autant négliger vos centres d'intérêts (sports, cinéma,...) qui seront de précieux atouts pour se ressourcer.

S'assurer de pouvoir être dans un environnement propice au travail, d'avoir une alimentation et un cycle de sommeil équilibrés s'avèrent être aussi des nécessités.

Il est aussi important de prendre le temps, avant de s'investir dans cette voie, de s'assurer de la force et de sa motivation mais aussi d'avoir un idée des poursuites d'études envisagées, que ce soit à travers l'intégration d'une école à l'issue des des concours, soit vers un cycle d'études recrutant sur résultats scolaires, et par voie de conséquence de commencer à mesurer les efforts à entreprendre pour mener bien votre projet d'études.

Préparer sa rentrée

Reprise des éléments des classes de lycée

Le programme de mathématiques de la filière BL s'appuie sur le programme de la « Spécialité mathématiques » des classes de lycée.

Un dispositif de soutien, de remédiation ou d'apports de connaissances supplémentaires est mis en place tout au long de l'année pour les étudiants ayant suivi uniquement l'enseignement de « Mathématiques complémentaires » en classe de terminale.

Il vous est demandé de prendre le temps cet été de mettre au clair vos documents de travail des années précédentes, et d'en faire des fiches de révisions, en insistant en particulier sur les points développés ci-après.

Les thématiques suivantes seront la colonne vertébrale de votre cours de mathématiques l'an prochain. Il est donc impératif :

- d'apprendre par coeur ses formules de dérivation ;
- d'être parfaitement au point sur les fonctions affines, les polynômes de degré 2 et la résolution des équations de degré 2 ;
- d'être capable d'étudier une fonction, notamment en ce qui concerne le calcul de la dérivée, l'étude du signe de la dérivée, puis la construction du tableau de variation et dans l'idéal le calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- d'avoir une bonne connaissance des fonctions exponentielles et logarithme népérien ;
- d'être à l'aise avec la notion de suite.

Vous pourrez, pour l'ensemble de ces points, reprendre simplement les exemples ou exercices traités en classe.

Travaux écrits de révisions pour la pratique du calcul

Comme dit plus haut, la finalité de votre formation en mathématiques est d'être capable de mener des raisonnements complexes. Cependant, ces derniers restent contraints par la nécessité de mener à bien des calculs parfois longs et délicats.

Il vous est demandé de s'approprier et de maîtriser au mieux les éléments présentés dans cinq documents de travail mis en ligne et disponible sur le site `https://chauvetmath.fr` dans la rubrique « Documents ».

TX01 | Manipuler les écritures fractionnaires

TX02 | Manipuler les puissances et les radicaux

TX03 | Calcul algébrique

TX04 | Opérations avec $\exp$ et $\ln$

TX05 | Équations de degré 1 et de degré 2 et s'y ramenant

Une correction est proposée pour chaque exercice. Pour cela, il suffit de relever le numéro à 4 chiffres de l'exercice et de se rendre dans la rubrique « Correction » pour en récupérer un corrigé.

Accès au site

Rubrique « Documents »

Rubrique « Correction »

Ces éléments seront évalués lors de votre première interrogation orale qui aura lieu dans les premières semaines de septembre. Attendre pour les travailler n'est pas la meilleure idée qui vient de vous traverser l'esprit.

Il vous est par ailleurs demandé de relever toutes les fautes de frappes présentes dans ces documents, et de me les signaler...

Bibliographie

Ouvrages fondamentaux et indispensables

Peu d'ouvrages spécifiques aux étudiants de CPGE de la filière BL existent et ne sont pas tous réactualisés.

Toutefois la proximité du programme de la filière BL avec celui des filières ECG ou BCPST rend pertinent l'idée d'acquérir des ouvrages à l'attention de ces étudiants, même s'il faudra filtrer ces derniers aux regards des éléments présentés en cours.

Maîtriser son cours et être rapidement autonome dans la résolution d'exercices, sont souvent la clé de la réussite aux concours. Les éléments de cours développés dans ces ouvrages seront sensiblement ceux qui vous seront présentés. Toutefois, les exercices que vous y trouverez s'avèreront souvent différents de ceux que je vous proposerai, et il pourrait être intéressant, pour s'approprier une notion, de compléter votre travail personnel par des exercices issus de ces ouvrages. Aussi, envisager acquérir des ouvrages du type « Exercices résolus » semble être plus pertinent que d'acquérir un ouvrage trop axé « Cours de mathématiques ».

Vous risquez cependant ne pas avoir le temps pendant ces deux années d'exploiter complètement de tels ouvrages d'autant que ces derniers ont un coût non négligeable, mais l'utilisation de votre « Pass Culture » pourra vous le permettre.

Les ouvrages d'approfondissement

Acquérir un ouvrage du type « Toutes les mathématiques en CPGE-BL » pour l'ensemble des deux années peut être pertinent, dans le sens où cela vous permettra, à l'instar d'un dictionnaire, de retrouver rapidement une définition ou un résultat. Il n'est toutefois pas nécessaire de procéder à cet investissement pour les premiers mois, d'autant que des ouvrages de ce type sont en consultation au CDI de l'établissement.

Les ouvrages méthodologiques

Quelques éditeurs proposent des ouvrages dont l'objectif est clairement la présentation de méthodes de résolutions d'exercices. Nombreux sont pour la plupart destinés aux filières de CPGE scientifiques, mais il en existe à l'attention des étudiants de filière ECG ou BCPST.

Chapitre | TX01

Manipuler les écritures fractionnaires

Version du 12-05-2023 à 10:36

Contexte

Le document présent récapitule et illustre la plupart des règles opératoires manipulées depuis le début de votre scolarité, et vous propose ensuite toute une série d'exercices les manipulant dans des situations des plus en plus complexes.

1. Simplification d'écritures fractionnaires

Théorème 1| Égalité d'écritures fractionnaires

Multiplication simultanée

Pour tous réels a, $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{125}{60} = \frac{5 \times 25}{5 \times 12} = \frac{25}{12}$$

Application 1| Réf. 4954

Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{15}{27} \qquad \frac{36}{15} \qquad \frac{48}{64} \qquad \frac{140}{870} \qquad \frac{108}{432} \qquad \frac{588}{108} \qquad \frac{432}{588} \qquad \frac{882}{1134}$$

Application 2| Réf. 4955

Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{8 \times 12 \times 25}{16 \times 3 \times 75} \qquad \frac{9 \times 1024 \times 121}{33 \times 256 \times 81} \qquad \frac{7 \times 81 \times 15}{10 \times 9 \times 14} \qquad \frac{77 \times 16 \times 36}{18 \times 49 \times 8}$$

2. Opérations avec les écritures fractionnaires

Théorème 2| Somme d'écritures fractionnaires

Règle de calcul

Pour tous réels a, b et $c \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{17}{24} + \frac{31}{24} = \frac{17+31}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\frac{25}{24} - \frac{19}{24} = \frac{25-19}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Cas d'écritures fractionnaires de dénominateurs différents

Principe de calcul | Réduction au même dénominateur

Pour tous réels a, $b \neq 0$, c et $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2 + 1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 - 3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$$

Écritures fractionnaires et réels

On rappelle que pour tout réel a, on a : $a = \frac{a}{1}$.

Application 3| Réf. 4956

Donner sous forme d'une fraction simplifiée le résultat du calcul :

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{3} - \frac{8}{9} + \frac{5}{6}$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} \qquad \frac{2}{5} - \frac{1}{15} + \frac{2}{3}$$

Théorème 3| Multiplication et quotient d'écritures fractionnaires

Règle de calcul

Pour tous réels a, b, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Règle de calcul

Pour tous réels a, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On retient souvent cette règle par : « diviser, c'est multiplier par l'inverse ».

$$\frac{5}{12}\times\frac{4}{30} = \frac{5\times 20}{12\times 30} = \frac{100}{360} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{7}{6}\times\frac{18}{49} = \frac{7\times\overbrace{18}^{6\times 3}}{6\times\underbrace{49}_{7\times 7}} = \frac{7\times 6\times 3}{6\times 7\times 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{3}{4}\times\frac{8}{9} = \frac{3\times 8}{4\times 9} = \frac{3\times 4\times 2}{4\times 3\times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{25}{18}} = \frac{5}{12}\times\frac{18}{25} = \frac{5\times 18}{12\times 25} = \frac{5\times 6\times 3}{2\times 6\times 5\times 5} = \frac{3}{2\times 5} = \frac{3}{10}$$

Application 4 | Réf. 4957

Donner sous forme d'une fraction simplifiée le résultat du calcul :

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{2} \qquad \frac{15}{49}\times\frac{21}{25} \qquad \frac{36}{64}\times\frac{24}{30}$$

$$\frac{55}{32}\times\frac{24}{33} \qquad \frac{120}{75}\times\frac{50}{90}$$

Application 5 | Réf. 4958

Effectuer les calculs suivants :

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{2} \qquad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{5}{6} \qquad \frac{5-3\times 7}{5+9\times 3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{17}{9}-\frac{1}{3}} \qquad \frac{5}{7}+\frac{1}{7}\times\left(5+\frac{1}{2}\right) \qquad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{10}{9}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{17}{9}-\frac{1}{6}} \qquad \frac{2}{13}-\frac{5}{12}\div\frac{10}{16} \qquad \frac{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$\frac{2-\frac{5}{12}}{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}} \qquad \frac{4}{\dfrac{3+\frac{3}{10}}{\frac{5}{2}-\frac{2}{5}}} \qquad \frac{\frac{5}{3}-\frac{7}{4}}{1+\frac{1}{6}}$$

Application 6 | Réf. 4959

Effectuer les calcul suivants :

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{23}{7}} \qquad \frac{5-\frac{2-3}{5-9}}{\frac{3+1}{4}+\frac{9-4}{3}} \qquad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

Application 7 | Réf. 4960

Les égalités suivantes sont-elles correctes ?

$$\frac{\frac{7}{8}-\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}}{3\times 2-2} = \frac{1}{8} \qquad \left(\frac{\frac{25}{2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}\right)^2 = 64$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}} = \frac{5}{3} \qquad \frac{2}{1+\dfrac{3}{2+\frac{5}{2}}} = \frac{6}{5}$$

Chapitre | TX02

Manipuler les puissances et les radicaux

Version du 12-05-2023 à 10:37

1. Autour des puissances

Proposition 1| Opérations sur les puissances

Pour tous réels non nuls a et b et les entiers relatifs m et n on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^4 \times 2^5 & = & 2^{4+5} \\ & = & 2^9 \\ & = & 512 \end{array}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\begin{array}{rcl} 3^4 \times 2^4 & = & (3 \times 2)^4 \\ & = & 6^4 \\ & = & 1296 \end{array}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{4^8}{4^3} & = & 4^{8-3} \\ & = & 4^5 \\ & = & 1024 \end{array}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{16^5}{4^5} & = & \left(\frac{16}{4}\right)^5 \\ & = & 4^5 \\ & = & 1024 \end{array}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\begin{array}{rcl} (2^4)^3 & = & 2^{4\times 3} \\ & = & 2^{12} \\ & = & 4096 \end{array}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^{-4} & = & \frac{1}{2^4} \\ & = & \frac{1}{16} \end{array}$$

On rappelle que pour $a \neq 0$, on a $a^0 = 1$, et que pour tout n entier relatif, $1^n = 1$.

Exemple 1| Simplification de produits

Exprimer uniquement avec des puissances de 2 et de 5 le produit suivant : $A = 4^3 \times 10^5 \times 25^4 \times 200^2$.

On pourra remarquer que $4 = 2 \times 2$, que $10 = 2 \times 5$, et que $200 = 2^3 \times 5^2$ de sorte à tout exprimer à l'aide de puissances de 2 et de 5 avant de faire opérer les propriétés de calcul précdentes.

$$\begin{array}{rcl} A & = & (2^2)^3 \times (2 \times 5)^5 \times (5^2)^4 \times (2^3 \times 5^2)^2 \\ & = & 2^{2\times 3} \times 2^5 \times 5^5 \times 5^{2\times 4} \times (2^3)^2 \times (5^2)^2 \\ & = & 2^6 \times 2^5 \times 5^5 \times 5^8 \times 2^{3\times 2} \times 5^{2\times 2} \\ & = & 2^{6+5} \times 5^{5+8} \times 2^6 \times 5^4 \\ & = & 2^{11} \times 5^{13} \times 2^6 \times 5^4 \\ & = & 2^{11+6} \times 5^{13+4} \\ & = & 2^{17} \times 5^{17} \end{array}$$

Exemple 2| Simplification de quotients

Exprimer uniquement avec des puissances de 2 et de 5 le quotient suivant :

$$A = \frac{5^3 \times (10^2)^3 \times 2^2 \times 10^8 \times 10^6}{(10^4)^6 \times 20^5}$$

On pourra remarquer que $20 = 2 \times 10$, ce qui permettra dans un premier temps de n'avoir que des puissances de 2, de 5 et de 10, puis on se souviendra que $10 = 2 \times 5$ ce qui permettra ensuite de n'avoir que des puissances de 2 et de 5.

$$\begin{aligned}
A &\underset{20=2\times 10}{=} \frac{5^3 \times 10^{2\times 3} \times 2^2 \times 10^{8+6}}{10^{4\times 6} \times (2 \times 10)^5} \\
&= \frac{5^3 \times 10^6 \times 2^2 \times 10^{14}}{10^{24} \times 2^5 \times 10^5} \\
&= \frac{5^3 \times 2^2 \times 10^{6+14}}{2^5 \times 10^{24+5}} \\
&= \frac{5^3 \times 2^2 \times 10^{20}}{2^5 \times 10^{29}} \\
&= 5^3 \times 2^{2-5} \times 10^{20-29} \\
&= 5^3 \times 2^{-3} \times 10^{-9} \\
&\underset{10=2\times 5}{=} 5^3 \times 2^{-3} \times (2 \times 5)^{-9} \\
&= 5^3 \times 2^{-3} \times 2^{-9} \times 5^{-9} \\
&= 5^{3+(-9)} \times 2^{-3+(-9)} \\
&= 5^{-6} \times 2^{-12} \\
&= \frac{1}{5^6 \times 2^{12}}
\end{aligned}$$

Application 1 | Réf. 3693

Simplifier les écritures suivantes :

1. $a = \dfrac{8^{73} \times 3^{31}}{9^{15} \times 2^{220}}$
2. $b = \left(\dfrac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2$
3. $c = \dfrac{\left(3^5 \times 2^{-2}\right)^2}{\left(9^{-1} \times 2^3\right)^3}$
4. $d = \left(\dfrac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 : \dfrac{10^2 \times 2}{5^8}$

Application 2 | Réf. 3694

Que dire de l'égalité $12^{100} \times (1,5)^{50} \times 6^{-149} = 6$?

Application 3 | Réf. 3695

Déterminer p et q entiers relatifs tels que $2^p \times 5^q = \dfrac{1}{125\,000}$.

Application 4 | Réf. 4895

Exprimer le quotient ci-dessous uniquement à l'aide de puissances d'entiers appartenant à $\{2, 3, 5, 7\}$:

$$A = \frac{8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2}{21^4 \times \left(2^2 \times 5^3\right)^{-2}}$$

2. Avec des radicaux

Proposition 2| Opérations avec les radicaux

Soit a un réel positif.
Le nombre $\sqrt{a}$ est l'**unique** réel **positif** dont le **carré est égal à** a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

Racine d'un produit et produit de racines	
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$	⚠ $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Racine d'un quotient et quotient de racines	
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	⚠ $a \geq 0$ et $b > 0$

Simplification de radicaux

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.

Exemple 3| Illustration des propriétés

Simplifier au mieux les radicaux suivants.

$$\begin{aligned} \sqrt{147} &= \sqrt{3 \times 49} \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{49} \\ &= \sqrt{3} \times 7 \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{625}{225}} &= \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{225}} \\ &= \frac{25}{15} \\ &= \frac{5 \times 5}{3 \times 5} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{486} &= \sqrt{6 \times 9 \times 9} \\ &= \sqrt{6 \times 9^2} \\ &= \sqrt{6} \times 9 \\ &= 9\sqrt{6} \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on a essayé de décomposer chaque entier en produit d'entiers .

Exemple 4| Simplifications de sommes de radicaux

Vérifier l'égalité suivante : $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{128} = \sqrt{2}$.

On remarque que : $32 = 16 \times 2$, que $50 = 25 \times 2$ ou encore que $128 = 64 \times 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{128} &= \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{64 \times 2} \\ &= \sqrt{4^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{8^2 \times 2} \\ &= 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemple 5| Radicaux au dénominateur

Montrer que $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

On remarque $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ et que $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

On remarque $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3} \times 2}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 6| Quantité conjuguée et radicaux

Montrer que $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$ et $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

On remarque que $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = \underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}_{=3-1}$ et que $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}+1} &= \frac{2}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\\
&= \sqrt{3}-1
\end{aligned}$$

On remarque que $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}_{=3-1}$ et que $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} &= \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\\
&= \frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\\
&= \frac{6 \times \sqrt{3} + 6 \times 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times 1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^1}\\
&= \frac{6\sqrt{3} + 6 - 3 - \sqrt{3}}{3-1}\\
&= \frac{3 + 5\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Application 5| Réf. 3696

Simplifier l'écriture de :

1. $x = \dfrac{\sqrt{8}}{2} + \dfrac{\sqrt{50}}{4} - \sqrt{\dfrac{576}{18}}$
2. $y = \sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{2}$
3. $z = \dfrac{\sqrt{8,1 \times 10^5}}{\sqrt{5 \times 10^3} \times \sqrt{45 \times 10^6}}$

Application 6 | Réf. 3697

Simplifier $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.

Chapitre | TX03

Calcul algébrique

Version du 12-05-2023 à 10:38

1. Manipuler les identités remarquables

Proposition 1| Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (3+2x)^2 & = & 3^3 + 2\times 3\times 2x + (2x)^2 \\ & = & 9 + 12x + 2^2 \times x^2 \\ & = & 9 + 12x + 4x^2 \end{array}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (3-2x)^2 & = & 3^3 - 2\times 3\times 2x + (2x)^2 \\ & = & 9 - 12x + 2^2 \times x^2 \\ & = & 9 - 12x + 4x^2 \end{array}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)(2x+3) & = & (2x)^2 - 3^2 \\ & = & 2^2 \times x^2 - 9 \\ & = & 4x^2 - 9 \end{array}$$

Exemple 1| Identités remarquables et radicaux

Montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ et que $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 = 17 - 2\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{rcl} \left(2+\sqrt{3}\right)^2 & = & 2^2 + 2\times 2\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ & = & 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ & = & 7 + 4\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(2\sqrt{2}-3\right)^2 & = & \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 2\sqrt{2}\times 3 + 3^2 \\ & = & 2^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 4\times 2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 8 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 17 - 12\sqrt{2} \end{array}$$

Exemple 2| Développement d'expressions

Développer et réduire les expressions $A(x) = (2x+y)^2 + (2x-y)^2$ et $B(x) = (x+y)\left((x+y)^2 - x^2\right)$.

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \left[(2x)^2 + 2\times 2x\times y + y^2\right] + \left[(2x)^2 - 2\times 2x\times y + y^2\right] \\ & = & \left[2^2\times x^2 + 4xy + y^2\right] + \left[2^2\times x^2 - 4xy + y^2\right] \\ & = & \left[4x^2 + 4xy + y^2\right] + \left[4x^2 - 4xy + y^2\right] \\ & = & 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 \\ & = & 8x^2 + 2y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} B(x) & = & (x+y)\left(x^2 + 2\times x\times y + y^2 - x^2\right) \\ & = & (x+y)\left(2xy + y^2\right) \\ & = & x\times 2xy + x\times y^2 + y\times 2xy + y\times y^2 \\ & = & 2x^2y + xy^2 + 2xy^2 + y^3 \\ & = & 2x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{array}$$

Application 1 | Réf. 3698

x et y sont deux nombres réels. Établir les égalités suivantes.

1. $(x+y)^2+(x-y)^2=2\left(x^2+y^2\right)$
2. $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$
3. $x^4+4y^4=\left((x+y)^2+y^2\right)\left((x-y)^2+y^2\right)$

Application 2 | Réf. 3699

Démontrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3-1=(x-1)\left(1+x+x^2\right)$;
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^4-1=(x-1)\left(1+x+x^2+x^3\right)$;
3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^6-1=(x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$;

Application 3 | Réf. 3701

On note p la demi-somme de trois réels a, b et c : $\quad p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Simplifier au mieux l'expression : $\quad (p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2$

Application 4 | Réf. 3702

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$
2. $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$
3. $\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2+\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

2. Quantité conjuguée et transformations d'expressions

Définition 1 | Quantité conjuguée

On rappelle que : $\quad \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)\,(a-b)=a^2-b^2.$

Les deux quantités $a+b$ et $a-b$ sont qualifiées de quantités conjuguées.

Illustration

$\sqrt{2}-3$ et $\sqrt{2}+3$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.
$\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.

Exemple 3 | Quantité conjuguée et radicaux

Montrer que : $\quad \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3.$

On remarque que $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \times \underbrace{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}_{=1}$ et que le dénominateur de ce nouveau quotient fait intervenir l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ qui permettra « d'éliminer les radicaux ».

Un calcul direct donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{1} \\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Un calcul direct donne :
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}\times 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3}{4-3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3}{1} \\ &= 2\sqrt{3}+3\end{aligned}$$

Exemple 4| Quantité conjuguée et expressions algégriques

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Sur le même principe que plus haut : $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \times \underbrace{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}}_{=1}$ sauf que l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ interviendra au numérateur.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} - x &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Application 5| Réf. 1924

Pour chacune des questions ci-après, on détaillera l'ensemble des calculs effectués.

1. **a.** Calculer $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$.

   b. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$.

   c. Peut-on généraliser ce résultat en écrivant que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.

2. En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, montrer que :

   a. $\dfrac{4}{2-\sqrt{2}} = 4+2\sqrt{2}$;

   b. $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$;

   c. $\dfrac{3-5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 21-13\sqrt{3}$;

d. $\dfrac{5+\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}} = -5+2\sqrt{10}.$

Application 6 | Réf. 4901

Montrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x - \sqrt{9x^2+1} = -\dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$

Chapitre | TX04

Opérations avec $\exp$ et $\ln$

Version du 12-05-2023 à 10:39

Contexte

L'objet du document n'est pas de construire ou de définir la fonction exponentielle ou la fonction logarithme népérien, mais uniquement de manipuler les propriétés opératoires de ces dernières.

1 . Du côté de la fonction logarithme népérien

Théorème 1| Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

Relation fondamentale

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Valeurs particulières

$\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$

Lien entre fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

Pour tout réel x, on a : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

Exemple 1| Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned}\ln(6) &= \ln(2\times 3)\\ &= \ln(2)+\ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(30) &= \ln(2\times 3\times 5)\\ &= \ln(2)+\ln(3)+\ln(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{6}\right) &= -\ln(6)\\ &= -\ln(2\times 3)\\ &= -(\ln(2)+\ln(3))\\ &= -\ln(2)-\ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{12}{5}\right) &= \ln(12)-\ln(5)\\ &= \ln(4\times 3)-\ln(5)\\ &= \ln(4)+\ln(3)-\ln(5)\\ &= \ln(2^2)+\ln(3)-\ln(5)\\ &= 2\ln(2)+\ln(3)-\ln(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(16) &= \ln(2^4)\\ &= 4\ln(2)\end{aligned}$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\begin{aligned}\ln(48) &= \ln(3\times 16)\\ &= \ln(3)+\ln(16)\\ &= \ln(3)+\ln(2^4)\\ &= \ln(3)+4\ln(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(14\sqrt{2}) &= \ln(14)+\ln(\sqrt{2})\\ &= \ln(2\times 7)+\frac{1}{2}\ln(2)\\ &= \ln(2)+\ln(7)+\frac{1}{2}\ln(2)\\ &= \ln(7)+\frac{3}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

Application 1 | Réf. 4902

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln(2)$.

1. $\ln(4)$
2. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
3. $\ln(6) - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$
4. $\ln\left(2\mathrm{e}^{2}\right)$
5. $\ln\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}\right)$
6. $\ln\left(\sqrt{8\mathrm{e}^{5}}\right)$

Application 2 | Réf. 4903

Établir les égalités suivantes :

1. $\ln(16) + \ln(4) = 6\ln(2)$
2. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{9}{8}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
3. $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right) = -\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$
4. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{8}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = 3$

2. Du côté de la fonction exponentielle

Théorème 2 | Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels x et y :

Relation fondamentale

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} = \mathrm{e}^{x-y}$$

$(\mathrm{e}^{x})^{n} = \mathrm{e}^{nx}$ où $n \in \mathbb{Z}$

Valeurs particulières

$\mathrm{e}^{0} = 1$ et $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$

Lien entre fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

Exemple 2 | Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2+5} &= \mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{5} \\ \mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4} &= \mathrm{e}^{4+(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3} &= \mathrm{e}^{5+(-3)} \\ &= \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{2})^{3} &= \mathrm{e}^{2\times 3} \\ &= \mathrm{e}^{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-3})^{5} &= \mathrm{e}^{(-3)\times 5} \\ &= \mathrm{e}^{-15} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{15}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{5}}{\mathrm{e}^{2}} &= \mathrm{e}^{5-2} \\ &= \mathrm{e}^{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{6}} &= \mathrm{e}^{4-6} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{-3})^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2+(-3)}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{-1})^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(-1)\times 3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \mathrm{e}^{(-3)-(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{1} \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Application 3 | Réf. 4904

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{4}$
2. $\left(\mathrm{e}^{4}\right)^{3} \times \mathrm{e}^{4}$
3. $\left(\mathrm{e}^{5} - \mathrm{e}^{4}\right)^{2} - \left(\mathrm{e}^{5} + \mathrm{e}^{4}\right)^{2}$
4. $\mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4}$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2}}$
7. $\left(\mathrm{e}^{3}\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{5}$
8. $\dfrac{\mathrm{e}^{6} \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-4}}$

Application 4 | Réf. 4905

L'égalité $\mathrm{e}^{5\ln(2)} \times \mathrm{e}^{7\ln(4)} = 2^{19}$ est-elle vraie ?

Application 5 | Réf. 4906

Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2 + 3\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = 2\mathrm{e}^{-2x} + 3\mathrm{e}^{-x} + 2$
2. $(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2} - (\mathrm{e}^{x} - 1)^{2} = 4\mathrm{e}^{x}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 2}{\mathrm{e}^{3x} + 1} = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^{-3x}}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2}}$

Chapitre | TX05

Équations de degré 1 et de degré 2 et s'y ramenant

Version du 12-05-2023 à 10:40

Contexte

L'objet de ce document consiste à vous faire travailler votre dextérité de calcul pour la résolution d'équations se ramenant à une forme du type $ax+b=0$ ou $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x.

1. Équations se ramenant à une forme du type $ax+b=0$

Théorème 1

On considère l'équation d'inconnue le réel x : $(\diamond)$: $ax+b=0$ où $a\neq 0$.

L'équation $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 qui vaut : $x_0=-\dfrac{b}{a}$.

On pourra adopter la rédaction suivante pour sa résolution : $(ax+b=0) \Leftrightarrow (ax=-b)$
$\Leftrightarrow \left(x=-\dfrac{b}{a}\right)$

Exemple 1| Résolution directe

L'équation $(\diamond)$: $2x+3=0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

On résoud $(\diamond)$:
$$\begin{aligned}(2x+3=0) &\Leftrightarrow (2x=-3)\\ &\Leftrightarrow \left(x=-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

et ainsi $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

Exemple 2| Cas se ramenant à une équation de degré 1

L'équation $(\diamond)$: $(x-1)(x+2)=x^2-6x+3$ d'inconnue le réel x, admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

Ce n'est pas une équation de degré 1.

Développer le membre de gauche de l'équation...

On résoud $(\diamond)$:
$$\begin{aligned}((x-1)(x+2)=x^2-6x+3) &\Leftrightarrow (x^2+2x-x-2=x^2-6x+3)\\ &\Leftrightarrow (x^2+x-2=x^2-6x+3)\\ &\Leftrightarrow (x^2+x-2-x^2+6x-3=0)\\ &\Leftrightarrow (7x-5=0)\\ &\Leftrightarrow (7x=5)\\ &\Leftrightarrow \left(x=\frac{5}{7}\right)\end{aligned}$$

et ainsi $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0 = \frac{5}{7}$.

Application 1 | Réf. 4961

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1) : 2x(x-1) + 3x = (x-1)(2x-1)$
2. $(\star_2) : x^2 - 6x + 1 = (x-3)(x-4)$
3. $(\star_3) : 3x + 1 - (x-1)(2x-3) = (2x+1)(x-1) + 2$
4. $(\star_4) : x(x-1) - x(x+1) = x(x-2) - x(x+2)$

2. Équations se ramenant à une forme du type $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème 2 | Résolution d'un équation de degré 2

On considère l'équation d'inconnue le réel x : $(\star) : ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.

On appelle discriminant de l'équation $(\star)$ le nombre $b^2 - 4 \times a \times c = \Delta$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation $(\star)$ ne possède pas de solutions réelle.

Si $\Delta \geq 0$, alors l'équation $(\star)$ possède deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans le cas où $\Delta = 0$, on a clairement $x_1 = x_2$, et on dit alors que x_1 est une racine double et on peut même retenir dans ce cas que $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 3 | Équation de degré 2 à discriminant strictement positif

L'équation $(\star) : x^2 - 5x + 6 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.
Son discriminant Δ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $(\star)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5+1}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5-1}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 4 | Équation de degré 2 à discriminant nul

L'équation $(\star) : x^2 - 4x + 4 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.
Son discriminant Δ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ admet une seule solution réelle notée x_0 donnée par :
$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{(-4)}{2 \times 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 5| Équation de degré 2 à discriminant strictement négatif

? L'équation $(\star)$: $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.

Son discriminant Δ est donné par :
$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation $(\star)$ n'admet pas de solutions réelles.

Exemple 6| Cas s'y ramenant

? L'équation $(\star)$: $x(x-1)(x-2) = \left(x^2 - 1\right)(x+1)$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.

Développer les deux membres de l'équation...

On a tout d'abord que :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)(x-2) &= x\left(x^2 - 2x - x + 2\right) \\ &= x\left(x^2 - 3x + 2\right) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2 - 1\right)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned} \left(x(x-1)(x-2) = \left(x^2-1\right)(x+1)\right) &\Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 - x - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 2x - x^3 - x^2 + x + 1 = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(-4x^2 + 3x + 1 = 0\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $(\star)$ se ramène bien à une équation du second degré.

Le discriminant Δ de l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ est donné par :
$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ et donc $(\star)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-4)} \\ &= \frac{-3 + 5}{-8} \\ &= \frac{-2}{-8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-4)} \\ &= \frac{-3 - 5}{-8} \\ &= \frac{-8}{-8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Application 2| Réf. 4952

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1)$: $x^2 + 4x - 5 = 0$
2. $(\star_2)$: $2x^2 - 13x + 15 = 0$
3. $(\star_3)$: $3x^2 - 6x + 3 = 0$

4. $(\star_4) : 3x^2 - 5x + 6 = 0$
5. $(\star_5) : 3x^2 - 24x + 48 = 0$
6. $(\star_6) : -2x^2 + x + 6 = 0$

Application 3 | Réf. 4953

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1) : x^2 - 5x + 6 = 2(x-2)(x+1)$
2. $(\star_2) : (x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - 6$
3. $(\star_3) : x(x-1)(x-2) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
4. $(\star_4) : (x-1)(x+2) - (x-3)(x+1) = x^2 - 2x + 7$