

DEVOIRS DE VACANCES — MPSI 2026/2027

Vous avez définitivement décidé de rejoindre la MPSI du lycée Alphonse Daudet pour l'année 2026/2027. Bienvenue.

J'insiste sur le fait que **la lecture des œuvres en Français-Philosophie** pendant les vacances est indispensable. Il serait totalement inacceptable de se présenter en septembre sans les avoir lues.

En mathématiques, le programme prend la suite de l'enseignement du lycée. Voici un récapitulatif des définitions, énoncés et démonstrations vues au lycée et utiles en MPSI.

Il faudra penser à travailler ces notions avant la rentrée. Si vous le souhaitez, vous pourrez utiliser les exercices des chapitres 1 à 22 du cahier de calcul disponible sur le site du lycée.

AU PROGRAMME DU LYCÉE.**I Définitions****I.1 Seconde**

- Donner la définition de l'ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux.
- Donner la définition de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels.
- Définir : multiple, diviseur, nombre pair, nombre impair.
- Donner la définition de la colinéarité de deux vecteurs du plan.
- Donner la définition du déterminant de deux vecteurs.
- Donner la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Donner la définition de la pente (ou le coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- Donner la définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire.
- Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I . Que signifie que f est croissante? Décroissante? Monotone?
- Donner la définition du maximum et du minimum d'une fonction définie sur un intervalle.
- Qu'est-ce que la réciproque d'une implication?

I.2 Première (spécialité)

- Donner la définition d'une suite arithmétique.
- Donner la définition d'une suite géométrique.
- Définir la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- Soit f une fonction définie sur un ouvert D_f et $a \in D_f$. Définir le taux de variation (ou taux d'accroissement) de f en a .
- Soit f une fonction définie sur un ouvert D_f et $a \in D_f$. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence, et la définition, du nombre dérivé de f en a .
- Qu'est-ce qu'une fonction dérivable sur un intervalle? Qu'est alors sa fonction dérivée?
- Donner une définition de la fonction exponentielle.
- Donner une définition du nombre e .
- Donner une définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel.
- Donner la définition du produit scalaire dans le plan.

- Qu'est-ce qu'un vecteur normal à une droite?
- Donner la définition de la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle.
- Donner la définition de deux événements indépendants.
- Donner la définition d'un système complet d'événements.
- Donner la définition d'une variable aléatoire.
- Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire.
- Donner la définition de l'espérance, de la variance, de l'écart-type d'une variable aléatoire réelle.

I.3 Terminale (spécialité)

- Définir : combinaison linéaire (dans le plan, dans l'espace).
- Définir : vecteurs colinéaires (dans le plan, dans l'espace).
- Définir : direction d'un plan de l'espace.
- Définir : base de l'espace; repère de l'espace.
- Définir : base orthonormée de l'espace; repère orthonormé de l'espace.
- Définir : décomposition d'un vecteur dans une base.
- Définir : produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace.
- Donner la définition de droites orthogonales dans l'espace. Donner la définition de droite orthogonale à un plan dans l'espace.
- Donner la définition de vecteur normal à un plan.
- Donner la définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite, du projeté orthogonal d'un point sur un plan.
- Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Définir : « $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ » puis « $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ ».
- Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Définir : « $(u_n)_n$ tend vers ℓ ».
- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$. Définir : « f tend vers $+\infty$ en a ».
- Donner la définition de la composée de deux fonctions.
- Donner la définition d'une fonction convexe sur un intervalle.
- Donner la définition d'un point d'inflexion d'une fonction.
- Donner la définition d'une fonction continue en un point, d'une fonction continue sur un intervalle.
- Donner la définition de la fonction logarithme népérien (\ln).
- Définir : primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
- Donner la définition de l'intégrale (entre a et b) d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$.
- Définir la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$.
- Définir la loi de Bernoulli, la loi binomiale.

I.4 Terminale (expert)

- Définir : nombre complexe, partie réelle, partie imaginaire, conjugaison.
- Définir : image d'un nombre complexe, affixe d'un point ou d'un vecteur.
- Définir : module d'un nombre complexe. Arguments d'un nombre complexe.
- Définir : exponentielle imaginaire. Définir : exponentielle d'un complexe.
- Définir : racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
- Définir : divisibilité dans \mathbb{Z} .
- Définir : congruences dans \mathbb{Z} .

- Soient a et n deux entiers premiers entre eux. Définir : inverse de a modulo n .
- Définir : PGCD de deux entiers, entiers premiers entre eux.
- Définir : nombre premier.
- Définir : matrice, matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne.
- Décrire les opérations (addition, multiplication, inversion, exponentiation) sur les matrices.

II Énoncés

II.1 Seconde

- Énoncer la relation de Chasles.
- Donner l'expression de la norme d'un vecteur à l'aide de ses coordonnées dans une base orthonormée.
- Soit α la mesure d'un angle aigu. Donner la valeur de $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$.
- Donner les variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, et cube, sur leurs domaines de définition respectifs que l'on précisera.

II.2 Première (spécialité)

- Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r . Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de u_0 , r et n .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $1 + 2 + \dots + n$.
- Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q . Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de u_0 , q et n .
- Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $1 + q + \dots + q^n$.
- Donner le signe d'une fonction polynomiale du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$).
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$ (où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) ait deux racines réelles distinctes. Donner alors une expression de la somme et du produit des racines.
- Soit f une fonction dérivable sur un ouvert D_f et $a \in D_f$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a .
- Donner les dérivées des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée (il n'est pas demandé de préciser le domaine de dérivabilité).
- Soient I un intervalle et u, v deux fonctions dérivables sur I . Donner la dérivée de $u + v$, uv , $\frac{1}{u}$ (sous réserve d'existence) et $\frac{u}{v}$ (sous réserve d'existence).
- Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} et $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner l'expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ (il n'est pas demandé de préciser le domaine de dérivabilité).
- Énoncer le théorème sur le signe de la dérivée (qui donne le lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa fonction dérivée).
- Caractériser les fonctions constantes parmi les fonctions dérivables.
- Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I . Que dire du nombre dérivé de f en un extremum de f , et de la tangente à sa courbe représentative en un tel point?
- Soient x et y des réels. Donner une formule pour $\exp(x + y)$, pour $\exp(x)\exp(-x)$.
- Donner le signe, le sens de variation et les limites en $\pm\infty$ de la fonction exponentielle.
- Donner la parité et la périodicité des fonctions cosinus et sinus.
- Donner les valeurs des cosinus et sinus de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$.
- Énoncer la formule donnant l'expression du produit scalaire à l'aide du cosinus.
- Donner l'expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormée (dans le plan).
- Quelle est la forme d'une équation cartésienne de droite?
- Quelle est la forme d'une équation cartésienne de cercle?
- Donner la formule des probabilités totales.

II.3 Terminale (spécialité)

- Quel est le nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints?
- Quel est le nombre d'éléments d'un produit cartésien? Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments?
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments? Quel est le nombre des parties d'un ensemble à n éléments?
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments? Quel est le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments?
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, donner une formule permettant de calculer $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles.
- Donner la formule de symétrie pour les coefficients binomiaux. Donner la relation de Pascal pour les coefficients binomiaux.
- Caractériser l'orthogonalité à l'aide du produit scalaire.
- Énoncer la bilinéarité du produit scalaire. Énoncer la symétrie du produit scalaire.
- Donner l'expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormée (dans l'espace).
- Développer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
- Énoncer les formules de polarisation.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par un point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par un point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur normal \vec{n} de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{n}} \\ y_{\vec{n}} \\ z_{\vec{n}} \end{pmatrix}$.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ sur le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ sur la droite passant par un point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
- Énoncer le théorème des gendarmes.
- Énoncer les propriétés dites d'opérations sur les limites.
- Donner en fonction de $q \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Énoncer le théorème sur les limites des suites monotones.
- Énoncer les croissances comparées.
- Énoncer le théorème de dérivation des fonctions composées.
- Donner trois caractérisations équivalentes (pas la définition) de la convexité d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.
- Quel est le lien entre continuité et dérivabilité?
- Que dire de l'image d'une suite convergente par une fonction continue? Donner un énoncé précis.
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone (également appelé théorème de la bijection).
- Énoncer les propriétés algébriques du logarithme.

- Donner la dérivée, les variations, et les limites en 0 et $+\infty$ de la fonction \ln .
- Donner la dérivée et les variations des fonctions \cos et \sin .
- Que dire de deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle?
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, donner votre primitive préférée de la fonction $x \mapsto x^n$ (il n'est pas demandé d'intervalle de validité).
Même question pour les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, \exp , \sin et \cos .
- Pour $a \in \mathbb{R}$, donner l'ensemble des solutions (définies sur \mathbb{R}) de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, donner l'ensemble des solutions (définies sur \mathbb{R}) de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
- Donner tous les liens connus entre intégrales et primitives.
- Énoncer les propriétés suivantes de l'intégrale : linéarité, positivité, relation de Chasles, croissance (intégration des inégalités).
- Énoncer la formule d'intégration par parties.
- Énoncer la linéarité de l'espérance.
- Pour X une variable aléatoire réelle, donner une expression de $V(aX)$. Pour X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, donner une expression pour $V(X + Y)$.
- Donner l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

II.4 Terminale (expert)

- Donner les propriétés algébriques de la conjugaison.
- Donner la formule du binôme dans \mathbb{C} .
- Donner les propriétés algébriques du module.
- Donner la relation fonctionnelle de l'exponentielle imaginaire.
- Énoncer les formules d'addition et de duplication du cosinus et du sinus.
- Énoncer les formules d'Euler.
- Énoncer la formule de Moivre.
- Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$. Donner les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Soient $a \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. Donner une forme factorisée de $z^n - a^n$.
- Que dire du nombre de racines complexes d'un polynôme de degré inférieur (ou égal) à n .
- Énoncer le théorème de division euclidienne.
- Donner une implémentation de l'algorithme d'Euclide en Python.
- Énoncer le théorème de Bézout.
- Énoncer le théorème de Gauss.
- Énoncer le théorème de décomposition en facteurs premiers.
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

III Démonstrations

III.1 Seconde

- Démontrer que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair.
- Démontrer que, pour a et b deux réels positifs, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Démontrer que, pour a et b deux réels positifs, on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Démontrer que le projeté orthogonal d'un point M sur une droite D est le point de la droite D le plus proche du point M .
- Démontrer que la fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ .
- Démontrer que la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- Démontrer que la fonction racine carré est croissante sur \mathbb{R}_+ .

III.2 Première (spécialité)

- Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r . Montrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
- Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q . Montrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $1 + 2 + \dots + n$.
- Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q . Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de u_0, q et n .
- Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $1 + q + \dots + q^n$.
- Démontrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Démontrer que la fonction carré est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
- Démontrer que la fonction inverse est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
- Soit I un intervalle ouvert et u, v deux fonctions dérivables sur I . Montrer que la fonction uv est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Donner avec démonstration les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

III.3 Terminale (spécialité)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'on a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
- Démontrer la relation de Pascal.
- Démontrer que le projeté orthogonal d'un point M sur un plan \mathcal{P} est le point de \mathcal{P} le plus proche de M .
- Donner avec démonstration l'équation cartésienne du plan normal au vecteur \vec{n} et passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$.
- Démontrer que toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Donner avec démonstration la limite de $(q^n)_n$ pour $q > 1$. *On pourra sans obligation d'achat utiliser l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel $x \geq -1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.*
- Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. On suppose que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, montrer que c'est aussi le cas de $(v_n)_n$.
- Donner avec démonstration les limites en $\pm\infty$ de la fonction exponentielle.
- Démontrer qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, où n est un entier.
- Soit I un intervalle ouvert et f une fonction réelle deux fois dérivable définie sur I . Montrer que, si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
- Donner avec démonstration la dérivée de la fonction logarithme népérien (la dérivabilité étant admise).
- Donner avec démonstration la limite en 0 de $x \mapsto x \ln(x)$.
- Démontrer que deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Donner avec démonstration l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel.
- Démontrer la formule d'intégration par parties.
- Soit f une fonction continue positive et croissante sur $[a, b]$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.
- Donner avec démonstration l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

III.4 Terminale (expert)

- Donner avec démonstration une formule pour le conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- Démontrer la formule du binôme.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a $|z^n| = |z|^n$.
- Soient $a \in \mathbb{C}$ et P un polynôme à coefficients complexes dont a est racine (c'est-à-dire tel que $P(a) = 0$). Montrer qu'on peut factoriser $P(X)$ par $(X - a)$.
- Soit $n \geq 1$. Montrer que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.
- Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
- Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que le pgcd de a et b peut s'écrire sous la forme $ax + by$ pour certains $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Démontrer le théorème de Gauss.