Mathématiques appliquées :
Bien commencer la classe préparatoire ECG.

Recommandations générales

Vous venez d'achever votre terminale et vous avez choisi de poursuivre vos études par la voie des classes préparatoires : bienvenue au lycée Alphonse Daudet !

~~Ces deux dernières années ont été très perturbées. Vous n'avez peut-être pas pu travailler dans de bonnes conditions, ni de manière très régulière. Il s'agit donc de (re)prendre dès à présent de bonnes habitudes de travail !~~

En ECG, le volume horaire du cours de mathématiques est souvent beaucoup plus important qu'au lycée et le rythme est très soutenu. Il s'agit donc de se mettre au travail doucement cet été et de façon plus intensive et structurée dès le début des cours. Cette fiche a pour but de vous donner quelques conseils et exercices afin d'aborder l'année qui arrive le plus sereinement possible.

Comme vous avez pu vous en rendre compte lors des années précédentes, les mathématiques sont construites en empilant des notions les unes au dessus des autres, comme des couches successives. Si l'une de ces strates n'est pas solide, vous aurez donc beaucoup de mal à continuer ces empilements sans que tout l'édifice s'effondre !

Il faut donc toujours veiller à avoir des bases solides.

Ma recommandation pour cet été est de commencer à honorer ce point, en refaisant de temps en temps quelques exercices de collège et de lycée.

Devoirs de vacances

— Le premier point fondamental qu'il faudra veiller à maîtriser concerne les calculs élémentaires appris au collège. Ils constituent les fondations, la strate qui formera la base de tout le programme de mathématiques. La calculatrice n'est pas autorisée lors des épreuves des concours, il est donc **primordial** de maitriser les points suivants :

- Calcul sur les fractions
- Calcul sur les puissances
- Calcul sur les racines carrées
- Factorisation et développement (identités remarquables par exemple)

⇝ Les pages suivantes contiennent quelques exercices pour vous aider à reprendre ces notions. *Ils sont à faire de façon autonome (comprenez dès à présent que le but des différents devoirs et de vous entraîner pour progresser, vous gagnerez un temps précieux) et à rendre au moment de la rentrée.*

⇝ Voici également des sites internet proposant des exercices sur ces différents points :
`http://www.gomaths.ch` : Vous y trouverez des exercices dans les onglets "Algèbre/calcul littéral" ; "Fractions/les 4 opérations" ou encore "Et tout le reste/calcul avec les puissances, les racines carrées".....
`http://mathsmentales.net/old` : Allez bien sur l'ancienne version du site, puis dans les onglets "Fractions", "Calcul littéral", ou encore "Fonctions/racines carrées ou puissances".
L'idéal serait de faire l'équivalent d' au moins une dizaine d'exercices par semaine (deux par jour sauf le dimanche par exemple !), en cherchant à aller vers les niveaux les plus difficiles, et en vous contrôlant avec la correction qui est fournie.

⇝ Vous pouvez également vous entrainer sur des annales de brevet (sans calculatrice).

— Le programme du lycée doit également être maîtrisé. Lors de ces vacances il conviendra donc de le reprendre en insistant particulièrement sur les points suivants :

- Résolution d'équations et d'inéquations (du second degré par exemple)
- Calcul de dérivées
- Fonctions exponentielle et logarithme : définitions, propriétés
- Suites
- Probabilités : généralités, probabilités conditionnelles.

Je vous souhaite de bonnes révisions et un bon été !

RÈGLES DE CALCUL À CONNAÎTRE

I. RÈGLES DE PRIORITÉ

On effectue d'abord les opérations entre parenthèses, puis les puissances, puis les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions.

Par exemple, $a + b \times c^2 - d^3$ doit se lire : $a + \left[b \times \left(c^2\right)\right] - \left(d^3\right)$

À noter :
Pour marquer la priorité de la multiplication, le symbole $\times$ peut parfois être omis.
Ainsi, ab doit se lire $a \times b$ et $2a$ doit se lire $2 \times a$.

II. FRACTIONS

- <u>Rappel :</u> Soit b un nombre non nul. Alors : $q = \dfrac{a}{b}$ signifie que $b \times q = a$

  En particulier : $c = \dfrac{1}{b}$ signifie que $b \times c = 1$

- <u>Simplification d'une fraction :</u> $\dfrac{a \times b}{a \times c} = \dfrac{b}{c}$

  MAIS $\dfrac{a+b}{a+c}$ ne peut PAS se simplifier. Donc, pour simplifier une fraction,
  il faut D'ABORD FACTORISER le numérateur et le dénominateur.

- <u>Multiplication de deux fractions :</u> $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

  En particulier : $a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{1} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{d}$

- <u>Inverse d'une fraction :</u> $\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$

- <u>Quotient de deux fractions :</u> $\dfrac{\dfrac{c}{d}}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{c}{d} \times \dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{c}{d} \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{c \times b}{d \times a}$

- <u>Addition de deux fractions :</u> $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d}{b \times d} + \dfrac{b \times c}{b \times d} = \dfrac{a \times d + b \times c}{b \times d}$

  Mais, en pratique,
  on peut souvent trouver un dénominateur commun plus simple que $b \times d$

III. PUISSANCES

- Rappel : $a^3 = a \times a \times a$ et $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \times a}$ et $a^0 = 1$

- Règles de calcul (sous réserve d'existence des différentes puissances) :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad \text{et} \quad \left(a^n\right)^p = a^{n \times p} \quad \text{et} \quad a^n \times b^n = \left(a \times b\right)^n$$

IV. DÉVELOPPER

- « Développer » signifie : transformer un produit en une somme.
- $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

V. FACTORISER

- « Factoriser » signifie : transformer une somme en un produit
  (après avoir trouvé un facteur commun, ou reconnu une identité remarquable).
- ***C'est très utile*** pour : simplifier une fraction, utiliser la règle des signes, résoudre une équation.
- $(\boldsymbol{a} \times b) + (\boldsymbol{a} \times c) = \boldsymbol{a} \times (b+c)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$

VI. RACINE CARRÉE

- Rappel : $\sqrt{a}$ est le seul réel r positif ou nul qui vérifie $r^2 = a$
- En pratique : pour calculer $\sqrt{a}$, on doit résoudre $[\ ?\ ]^2 = a$
  On obtient deux solutions opposées, et $\sqrt{a}$ est la solution positive ou nulle.
  Par exemple, $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{-4}$ n'existe pas.
  $\sqrt{2}$ existe, mais ce n'est pas un nombre entier.
- Règles de calcul (sous réserve d'existence des différentes racines carrées) :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

DEVOIRS DE VACANCES – À rendre le 2/9/2026

On fera apparaître le détail des calculs sur la copie.

EXERCICE 1 : CALCULS ÉLÉMENTAIRES

Attention aux parenthèses !

x et a sont des nombres réels, n est un nombre entier naturel.

1. Simplifier : $a^n + (-a)^n$ et $a^n - (-a)^n$ et $\dfrac{4^n - (-2)^{2n}}{2^n}$

2. Développer et ordonner : $F_1 = (1-x)^3 - (1+x)^3$ et $F_2 = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

EXERCICE 2 : FRACTIONS

1. Simplifier au maximum $A = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2}$

2. Donner les conditions sur les réels a et b pour que $B = \dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}$ existe.

Simplifier B au maximum lorsque ces conditions sont satisfaites.

EXERCICE 3 : IDENTITÉS REMARQUABLES

Développer les expressions suivantes, et vérifier que le résultat est un entier.

$A = \left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)$ $\qquad B = \left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^4$ $\qquad C = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

EXERCICE 4 : FACTORISATION

x est un nombre réel, n est un nombre entier.

1. Factoriser et simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = 2\sqrt{12} + 6\sqrt{27} - 7\sqrt{3} \qquad B = 2^{n+1} - 2^n \qquad C = 8^n - 2^{n+1} \times 4^{n+2}$$

$$D = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \qquad E = \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} \qquad F = \frac{9^{n+1}-9^n}{\left(3^{n+1}-3^n\right)^2}$$

2. Factoriser le premier membre
et résoudre l'équation sans calculer le discriminant.

$(E_1)\quad 12x^2+24x+12=0 \qquad (E_2)\quad (3x-1)(4x+x^2)-x(3x-1)=0$

$(E_3)\quad x^2-9+3(x-3)=0 \qquad (E_4)\quad (x-1)^2-(2x+1)^2=0$

3. Factoriser l'expression
et faire un tableau de signes sans calculer le discriminant.

$$f(x) = x-x^2 \qquad g(x) = x^3+4x^2 \qquad h(x) = \frac{3}{x-4} + \frac{4}{x+3}$$

4. On note f la fonction qui à tout réel x associe : $f(x) = (x^2-2x-1)e^x$

a) Calculer et factoriser $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

5. On note f la fonction qui à tout réel x associe : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

a) Calculer et factoriser $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites et la convexité.

c) Dans un repère orthogonal, placer précisément les asymptotes horizontales
et le point d'inflexion et la tangente en ce point,
puis tracer la courbe représentative de f.